Πρώτο διαγώνισμα στις καμπύλες του $\mathbb{R}^2$

Θέμα 1

Θεωρούμε την καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε, $c(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t),\ t \in \mathbb{R}$.

(i) Να εξετάσετε αν η παραπάνω καμπύλη είναι κανονική.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} c'(t) = (0,0)$.

(iii) Να βρείτε το μήκος τόξου της παραπάνω καμπύλης και να αποδείξετε ότι το $\int_{t_0}^{\infty} \|c'(s)\|\, ds$, είναι πεπερασμένο.

(iv) Να υπολογίσετε την καμπυλότητα της c ως προς την τυχαία παράμετρο t και έπειτα ως προς το μήκος τόξου.

(v) Έχει η καμπύλη c αυτοτομές;

(vi) Να βρείτε το πλαίσιο Frenet της c ως προς την τυχαία παράμετρο t και ώς προς το μήκος τόξου.

(vii) Εξετάστε αν υπάρχει κάθετος ευθεία της καμπύλης c η οποία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 2

Έστω καμπύλη $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ μοναδιαίας ταχύτητας με καπυλότητα $k(s) < 1,\ \forall s \in I$. Θεωρούμε την καμπύλη $b(s) := c(s) + n(s),\ s \in I$, όπου $n(s)$ το κάθετο διάνυσμα της c. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη b είναι κανονική, να βρείτε το μήκος τόξου και το πλαίσιο Frenet αυτής. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η καμπυλότητα k_b της b δίνεται από τη σχέση

$$k_b = \frac{k}{1-k}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ